

增益幅度不一致条件下的 SRI 算法

赵为粮¹, 隆克平², 杜惠平¹

(1. 重庆邮电学院, 重庆 400065; 2. 北京邮电大学, 北京 100876)

摘要: 阵元增益不一致导致 ESPRIT 算法的波达方向(DOA)估计性能恶化. 本文提出了一种新的利用子空间旋转不变性(SRI)的 DOA 估计算法, 将 DOA 信息包含于矩阵的特征值估计中, 但对增益幅度误差敏感. 由于未利用增益幅度信息, DOA 估计结果可能存在模糊性, 本文给出了解模糊方法及仿真实验结果.

关键词: 增益幅度不一致; SRI; 波达方向; 模糊

中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 09-1266-03

RSI Algorithm for Direction of Arrival Estimation with Uncertainties of Sensor Gain

ZHAO Wei-liang¹, LONG Ke-ping², DU Hui-ping¹

(1. Chongqing University of Posts & Telecommunications, Chongqing 400065, China;

2. Beijing University of Posts & Telecommunications, Beijing 100876, China)

Abstract: Recent studies have shown that performance of DOA estimation via ESPRIT or other algorithms degrades drastically with a bad knowledge on array manifold. In this paper, a new approach based on subspace rotational invariance (SRI) for DOA estimation with unknown intensity coefficients is proposed. The ambiguous estimation appears in certain cases and must be eliminated. Detailed analysis of ambiguous problem is presented and is illuminated by numerical examples.

Key words: unknown intensity; DOA estimation; SRI; ambiguity

1 引言

与波达方向(DOA)估计的 MUSIC 方法不同, ESPRIT 算法不要求已知具体的阵列流形信息, 只需双阵列的对应阵元间具有相同的基线. 在信号模型正确时, 二者具有良好的 DOA 估计性能. 当存在信号模型误差时, 错误的信号模型将导致 DOA 估计性能恶化, 甚至得不到正确的估计结果. 大量研究主要是与 DOA 无关的模型误差分析及处理^[1-3], 而与 DOA 有关的模型误差分析却较少. 在近场目标或各阵元增益与 DOA 有关且不一致的条件下, 文献[4]给出了一种全自校准(global self-calibration)DOA 估计方法, 需要多维参数搜索. 文[5]提出了一种一维搜索 DOA 估计方法, 解决了与 DOA 有关的各阵元增益幅度不一致引起的 DOA 估计性能恶化问题. 由于未利用增益幅度信息, 该方法存在 DOA 估计的模糊性问题, 文[5]给出的解模糊方法过于简单, 并不可靠.

本文在与 DOA 有关的各阵元增益幅度不一致的条件下, 提出了一种新的利用子空间旋转不变性(SRI)的 DOA 估计算法, 并较深入地分析了模糊性问题, 给出了解模糊方法及仿真实验结果.

2 增益幅度不一致条件下的信号模型

假设具有 M 个阵元的均匀线阵, 相邻两个阵元间隔 d 不

大于 $1/2$ 波长. q 个窄带信号源从不同的方向 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ 到

达阵列, t 时刻的阵列观测数据 \mathbf{x}_t 为 $\mathbf{x}_t = \sum_{i=1}^q s_i(t) \mathbf{G}_i \mathbf{a}(\theta_i) + \mathbf{n}_t$, 其中 $\mathbf{a}(\theta)$ 为阵列流形, $\mathbf{a}(\theta) = [1 e^{-j2\pi(d/\lambda)\sin\theta} \dots e^{-j(M-1)2\pi(d/\lambda)\sin\theta}]^T$, θ 为波达方向, $[\]^T$ 表示转置, $s_i(t)$ 为 t 时刻第 i 个窄带信号的复振幅, 为相互独立的随机变量, \mathbf{n}_t 是加性随机噪声, $\mathbf{G}_i = \text{diag}(\mathbf{g}_i)$, \mathbf{g}_i 为与波达方向 θ_i 有关的阵元增益幅度矢量. 阵列观测数据 \mathbf{x}_t 又可以表示为,

$$\mathbf{x}_t = \sum_{i=1}^q s_i(t) \mathbf{b}(\theta_i, \mathbf{g}_i) + \mathbf{n}_t \quad (1)$$

其中 $\mathbf{b}(\theta_i, \mathbf{g}_i)$ 为信号源的方向矢量,

$$\mathbf{b}(\theta_i, \mathbf{g}_i) = \Phi(\theta_i) \mathbf{g}_i \quad (2)$$

$\Phi(\theta_i) = \text{diag}(\mathbf{a}(\theta_i))$. 考虑式(1)中信号源方向矢量 $\mathbf{b}(\theta_i, \mathbf{g}_i)$ 和信号复振幅 $s_i(t)$ 的不可辨识性, 不妨假设 \mathbf{g}_i 为单位矢量.

假设信号矢量 $\mathbf{s}_t = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_q(t)]^T$ 和噪声矢量 \mathbf{n}_t 是互不相关的零均值随机矢量, 它们的二阶矩为 $\mathbf{E}[\mathbf{s}_t \mathbf{s}_t^H] = \mathbf{P} \delta(t, k)$, $\mathbf{E}[\mathbf{n}_t \mathbf{n}_t^H] = \sigma_n \mathbf{I}_M \delta(t, k)$, 其中 $\mathbf{P} = \mathbf{E}[\mathbf{s}_t \mathbf{s}_t^H]$ 为信号协方差矩阵, $\delta(t, k)$ 为 Kronecker delta 函数, $[\]^H$ 表示共轭转置, \mathbf{I}_M 为 M 阶单位矩阵, σ_n 为噪声方差. 阵列观测数据的协方差矩阵 $\mathbf{R} = \mathbf{B} \mathbf{P} \mathbf{B}^H + \sigma_n \mathbf{I}_M$, 其中 $\mathbf{B} = [\mathbf{b}(\theta_1, \mathbf{g}_1), \mathbf{b}(\theta_2, \mathbf{g}_2), \dots, \mathbf{b}(\theta_q, \mathbf{g}_q)]$. 它的奇异值分解为 $\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n \mathbf{\Lambda}_n \mathbf{U}_n^H$ 其中 q 阶

收稿日期: 2000-07-21; 修回日期: 2000-12-25

矩阵 $\Lambda_s = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q)$, $M - q$ 阶矩阵 $\Lambda_n = \text{diag}(\sigma_n, \sigma_n, \dots, \sigma_n)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_q > \sigma_n$, U_s 和 U_n 的列矢量分别由 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$ 和 σ_n 对应的奇异矢量构成。

3 增益幅度不一致条件下的 SRI 算法

在增益幅度不一致条件下,一般不满足旋转不变性,即 $\bar{\mathbf{b}}(\theta_i, \mathbf{g}_i) \neq e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta} \mathbf{b}(\theta_i, \mathbf{g}_i)$, 其中 $M - 1$ 阶矢量 $\bar{\mathbf{b}}(\theta_i, \mathbf{g}_i)$ 和 $\mathbf{b}(\theta_i, \mathbf{g}_i)$ 分别为

$$\bar{\mathbf{b}}(\theta_i, \mathbf{g}_i) = \mathbf{K}_1 \mathbf{b}(\theta_i, \mathbf{g}_i), \mathbf{b}(\theta_i, \mathbf{g}_i) = \mathbf{K}_2 \mathbf{b}(\theta_i, \mathbf{g}_i) \quad (3)$$

($M \cdots 1$) $\times M$ 阶选择矩阵 \mathbf{K}_1 和 \mathbf{K}_2 分别为 $\mathbf{K}_1 = [\mathbf{I}_{M-1} \ \mathbf{O}_{M-1}]$ 和 $\mathbf{K}_2 = [\mathbf{O}_{M-1} \ \mathbf{I}_{M-1}]$, \mathbf{I}_{M-1} 为 $M - 1$ 阶单位矩阵, \mathbf{O}_{M-1} 为 $M - 1$ 阶零矢量。因此,阵元增益不一致条件将导致 ESPRIT 算法的 DOA 估计性能恶化。假设信号源的协方差矩阵 \mathbf{P} 非奇异,即不同的窄带信号源不完全相干,则有 $\mathbf{b}(\theta_i, \mathbf{g}_i) = \mathbf{U}_i \mathbf{h}_i$, 其中 \mathbf{h}_i 为 q 阶矢量, $i = 1, 2, \dots, q$ 。代入式(2),得

$$\Phi(\theta_i) \mathbf{g}_i = \mathbf{U}_i \mathbf{h}_i \quad (4)$$

由于 \mathbf{g}_i 为实数矢量,信号子空间满足二次共轭旋转不变性,即

$$\bar{\mathbf{b}}(\theta_i, \mathbf{g}_i) \circ \mathbf{b}^*(\theta_i, \mathbf{g}_i) = e^{2j\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta} \bar{\mathbf{b}}^*(\theta_i, \mathbf{g}_i) \circ \mathbf{b}(\theta_i, \mathbf{g}_i)$$

其中 \circ 表示 Hadamard 乘积运算符,即矢量对应元素间相乘。将式(4)代入式(3),再代入上式,得

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{u}_1^H \mathbf{h}_i)^* \mathbf{u}_1^H \mathbf{h}_i \\ (\mathbf{u}_2^H \mathbf{h}_i)^* \mathbf{u}_2^H \mathbf{h}_i \\ \dots \\ (\mathbf{u}_{M-1}^H \mathbf{h}_i)^* \mathbf{u}_{M-1}^H \mathbf{h}_i \end{bmatrix} = e^{2j\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta} \begin{bmatrix} (\mathbf{u}_1^H \mathbf{h}_i)^* \mathbf{u}_2^H \mathbf{h}_i \\ (\mathbf{u}_2^H \mathbf{h}_i)^* \mathbf{u}_3^H \mathbf{h}_i \\ \dots \\ (\mathbf{u}_{M-1}^H \mathbf{h}_i)^* \mathbf{u}_M^H \mathbf{h}_i \end{bmatrix}$$

其中 $\mathbf{u}_1^H, \mathbf{u}_2^H, \dots, \mathbf{u}_M^H$ 为 U_s 的行矢量。利用矢量化算子的性质: $\text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A}) \text{vec}(\mathbf{B})$, 其中 \otimes 为 Kronecker 矩阵乘积运算符,上式又可以写成

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{v}_i = e^{2j\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta} \mathbf{P}_2 \mathbf{v}_i, \quad (5)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, q$, ($M - 1$) $\times q^2$ 阶矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ 和 q^2 阶矢量 \mathbf{v}_i 分别为

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \otimes \mathbf{u}_2^H \\ \mathbf{u}_2^T \otimes \mathbf{u}_3^H \\ \dots \\ \mathbf{u}_{M-1}^T \otimes \mathbf{u}_M^H \end{bmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2^T \otimes \mathbf{u}_1^H \\ \mathbf{u}_3^T \otimes \mathbf{u}_2^H \\ \dots \\ \mathbf{u}_M^T \otimes \mathbf{u}_{M-1}^H \end{bmatrix}, \mathbf{v}_i = \text{vec}(\mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H)$$

可见,矢量 \mathbf{v}_i 为矩阵 \mathbf{P}_1 和 \mathbf{P}_2 的广义特征矢量, $e^{-2j\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta}$ 为相应的广义特征值。利用 ($M - 1$) $\times q^2$ 阶阵 \mathbf{P}_1 和 \mathbf{P}_2 的位于复平面单位圆附近的广义特征值,可以估计信号源 DOA。

4 模糊性分析

假设增益幅度不一致条件下的方向矩阵 \mathbf{B} 满秩,若存在方向矢量 $\mathbf{b}(\theta_{q+1}, \mathbf{g}_{q+1})$, $\theta_{q+1} \neq \theta_i, i = 1, 2, \dots, q$, 满足 $\mathbf{Bz} = \mathbf{b}(\theta_{q+1}, \mathbf{g}_{q+1})$, 则可以证明一般还存在另一个与 $\mathbf{b}(\theta_{q+1}, \mathbf{g}_{q+1})$ 不完全相关的方向矢量 $\mathbf{b}(\theta_{q+1}, \mathbf{g}_{q+2})$, 也位于方向矩阵 \mathbf{B} 决定的信号子空间,且与方向矢量 $\mathbf{b}(\theta_{q+1}, \mathbf{g}_{q+1})$ 对应的各元素相位相同,仅幅度不同。

证明 方向矢量 $\mathbf{b}(\theta_{q+1}, \mathbf{g}_{q+1})$ 可以表示为 $\mathbf{b}(\theta_{q+1}, \mathbf{g}_{q+1}) = \Phi^{-1}(\theta_{q+1}) \mathbf{g}_{q+1}, \mathbf{g}_{q+1} \in R^M$, 且 \mathbf{g}_{q+1} 没有为零的元素。若 $\mathbf{Bz} = \mathbf{b}(\theta_{q+1}, \mathbf{g}_{q+1})$, 令 $\mathbf{C} = \Phi^{-1}(\theta_{q+1}) \mathbf{B}$, 得 $\mathbf{Cz} = \mathbf{g}_{q+1}$ 。令 $\mathbf{C} = \mathbf{C}_r + j\mathbf{C}_i, \mathbf{z} = \mathbf{z}_r + j\mathbf{z}_i$, 其中 $\mathbf{C}_r, \mathbf{C}_i \in R^{M \times q}, \mathbf{z}_r, \mathbf{z}_i \in R^q$, 则 $\mathbf{C}_r \mathbf{z}_r - \mathbf{C}_i \mathbf{z}_i = \mathbf{g}_{q+1}, \mathbf{C}_r \mathbf{z}_i + \mathbf{C}_i \mathbf{z}_r = 0$ 。因为 $\mathbf{C}_r = (\mathbf{C} + \mathbf{C}^*)/2, \mathbf{C}_i = (\mathbf{C} - \mathbf{C}^*)/2$, 所以

$$[\mathbf{C} + \mathbf{C}^* \ \mathbf{C} - \mathbf{C}^*] \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \\ \mathbf{z}_r \end{bmatrix} = 0$$

两边取共轭,得 $\mathbf{C}_r \mathbf{z}_i - \mathbf{C}_i \mathbf{z}_r = 0$ 。所以 $\mathbf{C}_r \mathbf{z}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{z}_r = 0$ 。故有 $\mathbf{Cz}^* = \mathbf{C}_r \mathbf{z}_r + \mathbf{C}_i \mathbf{z}_i = \mathbf{h}_{q+1} \in R^M$ 。因此,存在方向矢量 $\mathbf{b}(\theta_{q+1}, \mathbf{g}_{q+2}) = \Phi(\theta_{q+1}) \mathbf{g}_{q+2} = \mathbf{Bz}^*$, 与方向矢量 $\mathbf{b}(\theta_{q+1}, \mathbf{g}_{q+1})$ 一样,都属于由分布式目标方向矩阵决定的信号子空间。

当 $\mathbf{C}_r \mathbf{z}_i \neq 0$ 时, $\mathbf{b}(\theta_{q+1}, \mathbf{g}_{q+2})$ 与方向矢量 $\mathbf{b}_{q+1}(\theta_{q+1}, \mathbf{g}_{q+1})$ 不完全相关,二者对应的各元素相位相同,仅幅度不同。若 $\mathbf{C}_r \mathbf{z}_i = 0$, 由 $\mathbf{C}_r \mathbf{z}_i = 0$ 得 $\mathbf{Cz}_i = 0$, 所以 $\mathbf{Bz}_i = 0$ 。因为方向矩阵 \mathbf{B} 满秩,故 $\mathbf{z}_i = 0$ 。因此, $\mathbf{Bz}_r = \Phi(\theta_{q+1}) \mathbf{g}_{q+1}$ 。令 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_r + j\mathbf{B}_i$, 其中 $\mathbf{B}_r, \mathbf{B}_i \in R^{M \times q}$, 则 $\mathbf{B}_r \mathbf{z}_r = 0, \Phi_i(\theta_{q+1}) \mathbf{g}_{q+1} = 0$, 其中 $\Phi_i(\theta_{q+1})$ 为对角矩阵 $\Phi(\theta_{q+1})$ 的虚部。由于 $\Phi(\theta_{q+1})$ 的对角元素不都为零,所以 \mathbf{g}_{q+1} 有为零的元素,这与 \mathbf{g}_{q+1} 没有为零的元素的假设矛盾。证毕

因此,若在复平面单位圆上的存在伪广义特征值,则一般是成对的出现在同一波达方向。利用这一性质,可以识别复平面单位圆上的伪广义特征值,达到解模糊的目的。

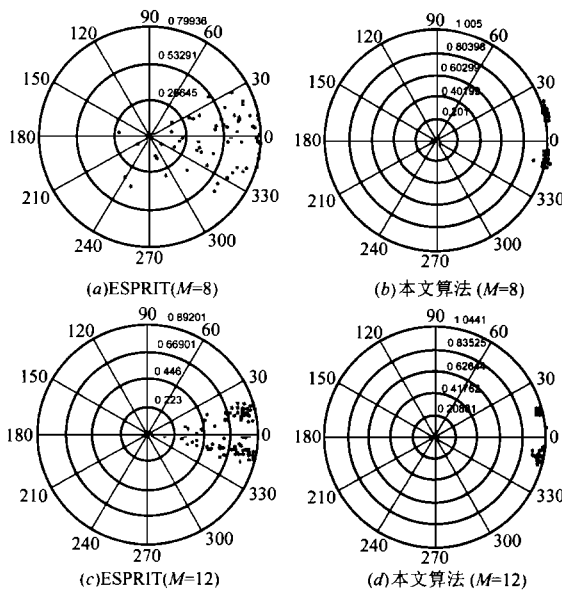


图 1

5 数值结果

考虑由 M 个阵元组成的相邻间隔为 $1/2$ 波长的均匀线阵,各阵元的增益幅度为相互独立、均值为 1, 方差为 σ_g^2 的高斯分布随机变量。例 1: 2 个窄带信号源分别从波达方向 $\theta_1 = -3.5^\circ$ 和 $\theta_2 = 4.5^\circ$ 到达阵列, $\sigma_g^2 = 3.6$, 信噪比为 5dB, 快摄数为 200。图 1(a)、(b) 和图 1(c)、(d) 分别给出了 $M = 8$ 和 $M = 12$

时,一般的 ESPRIT 算法和本文算法的估计结果,是各 50 次仿真实验的统计结果。例 2:3 个窄带信号源分别从波达方向 $\theta_1 = -3.5^\circ$, $\theta_2 = 4.5^\circ$ 和 $\theta_3 = -13.5^\circ$ 到达阵列, $\sigma_{\epsilon_1}^2 = 0.6$, $\sigma_{\epsilon_2}^2 = 0.2$ 和 $\sigma_{\epsilon_3}^2 = 0.8$, 信噪比为 5dB, 快拍数为 200。图 2(a)和图 2(b)分别给出了 $M = 12$ 时,一般的 ESPRIT 算法和本文算法的估计结果,是各 50 次仿真实验的统计结果。可见,与一般的 ESPRIT 算法相比,本文算法对增益幅度的不一致性不敏感。

6 结论

在与波达方向有关的各阵元增益幅度不一致的条件下,本文利用信号子空间的二次共轭旋转不变性,提出了一种新的基于广义特征值分解的 DOA 估计方法,由位于复平面单位圆附近广义特征值的相位信息估计 DOA。仿真实验结果表明,与 ESPRIT 算法相比,该算法对增益幅度的不一致性不敏感,但因为未利用各阵元的增益幅度信息,存在 DOA 估计模糊性问题。通过检验复平面单位圆附近广义特征值在同 DOA 处是否成对出现,可以识别伪广义特征值,得到正确的 DOA 估计。

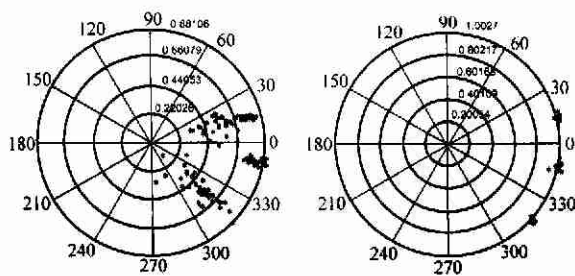


图 2 (a)ESPRIT($M = 12$) (b)本文算法($M = 12$)

参考文献:

- [1] B Friedlander, A J Weiss. Eigenstructure methods for direction finding with sensor gain and phase uncertainties [A]. ICASSP [C], New York, 1988:2681 - 2684.

- [2] M Jansson, A L Swindlehurst, B Ottersten. Weighted subspace fitting for general array error models [J]. IEEE Trans-SP, 1998, 46(9):2484 - 2498.
- [3] A Paulraj, T Kailath. DOA estimation by eigenstructure methods with unknown sensor gain and phase [A]. ICASSP [C], Tampa FL, 1985, 3:17.7.1 - 17.7.4.
- [4] A Fiebler, A Fereol, P Larzabal, H Clergeot. Robust bearing estimation in the presence of direction-dependent modeling errors: Identifiability and treatment [A]. ICASSP [C], Detroit, MI, 1995:1884 - 1887.
- [5] A J Weiss, A S Willsky, B C Levy. Eigenstructure approach for array processing with unknown intensity coefficients [J]. IEEE Trans-SP, 1988, 36(10):1613 - 1617.

作者简介:



赵为隼 男, 1962 年 12 月出生, 重庆铜梁县, 重庆邮电学院副教授, 电子科技大学(成都)博士生, 现从事电磁散射及复射线理论、自适应天线技术和光纤通信技术等方面的研究。



唐克军 男, 1968 年 5 月出生, 四川通江县, 北京邮电大学副教授、博士后, 硕士生导师, 现从事宽带网络性能分析、Internet QoS 模型及实现技术、无线 TCP/IP 改进及性能分析等方面的研究, 发表论文近 50 篇。

杜惠平 男, 1966 年 7 月出生, 山西晋城, 重庆邮电学院教授、博士, 硕士生导师, 现从事电磁散射与辐射、自适应天线技术及移动通信技术等方面的研究, 发表论文近 50 篇。